

О маятнике Максвелла

В.И.Николаев

МГУ им. М.В.Ломоносова, физический факультет

Обсуждается вопрос о роли выбора системы отсчета при записи уравнения движения и уравнения моментов для твердого тела при решении задач на тему «Плоское движение». Главное внимание уделяется вопросу о том, что при решении таких задач возможны несколько равнозначных вариантов записи исходных динамических уравнений. Основные идеи иллюстрируются на примере двух задач – об одиночном и о двух связанных маятниках Максвелла.

1. Введение

В общем курсе физики основные идеи поясняются обычно на простых и ясных примерах. В качестве примера может быть взята какая-нибудь задача, которую вовсе не обязательно решать от начала и до конца. Рамки рассмотрения задачи определяются в таких случаях контекстом разговора или, как говорят еще, учебными аспектами рассматриваемого примера.

Так обстоит дело и при изучении темы «Плоское движение» в разделе «Механика». Нередко при изучении этой темы в качестве конкретного примера рассматривается случай движения маятника Максвелла (рис. 1). Пример этот удобен во многих отношениях. Потому его и рассматривают в связи со многими аспектами темы.

Есть, однако, одна сторона дела, которая, как правило, вообще остается вне рассмотрения, – вопрос о роли выбора системы отсчета, в которой записываются динамические уравнения для маятника Максвелла. Этот вопрос и составляет основной предмет данной статьи.

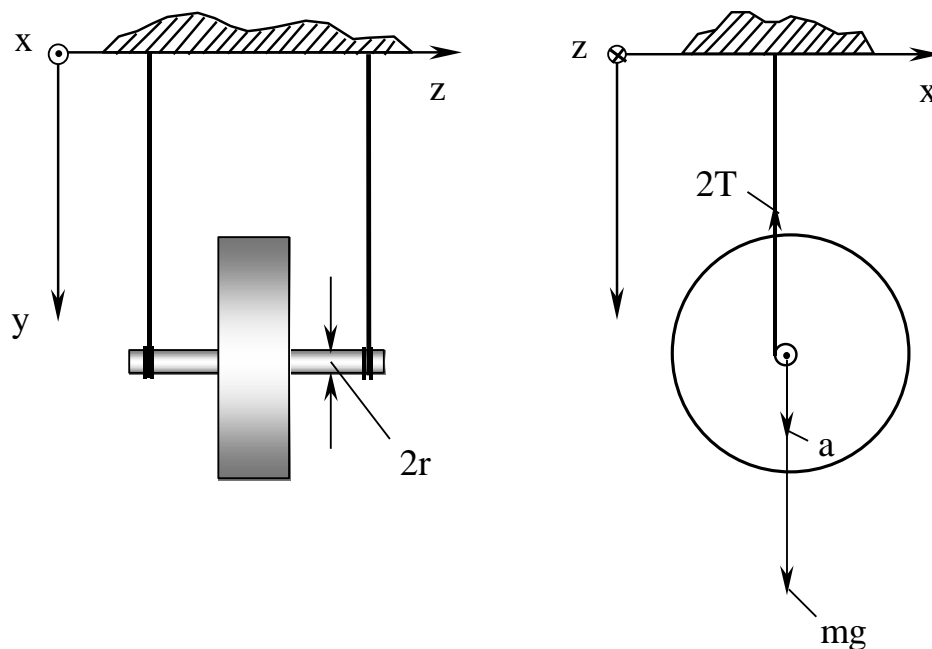


Рис. 1.

2. Одиночный маятник Максвелла: учебные аспекты

Сначала остановимся кратко на тех наиболее важных аспектах, которые могут быть затронуты при рассмотрении особенностей движения маятника Максвелла в связи с изучением темы «Плоское движение». Это поможет нам увидеть суть обсуждаемой проблемы и разобраться в ней.

Прежде всего, маятник Максвелла довольно просто можно показать в действии – на лекции или в физическом практикуме. Каждый может убедиться в том, что траектории всех точек маятника располагаются в параллельных друг другу плоскостях – в полном соответствии с определением понятия «плоское движение».

Во-вторых, на примере маятника Максвелла удобно проиллюстрировать применение теоремы о движении центра масс. Так, если m – масса маятника, а T – сила натяжения каждой из двух нитей (обе они намотаны на ось маятника радиуса r), то в соответствии с теоремой о движении центра масс будем иметь:

$$mg - 2T = ma. \quad (1)$$

Здесь a – ускорение центра масс маятника в проекции на ось y лабораторной системы координат (ее мы считаем инерциальной), g – ускорение свободного падения.

В-третьих, для маятника Максвелла нетривиальным оказывается вопрос об уравнении вращательного движения – так называемом «уравнении моментов». Если выбрать в качестве «оси моментов» ось маятника (она движется с ускорением центра масс маятника \mathbf{a}), то уравнение моментов не будет содержать момента сил инерции – поскольку равнодействующая этих сил $m(-\mathbf{a})$, как и равнодействующая сил тяжести mg , приложена в центре масс маятника, а значит, ее момент равен нулю (рис. 2):

$$2Tr = I_0\beta \quad (2)$$

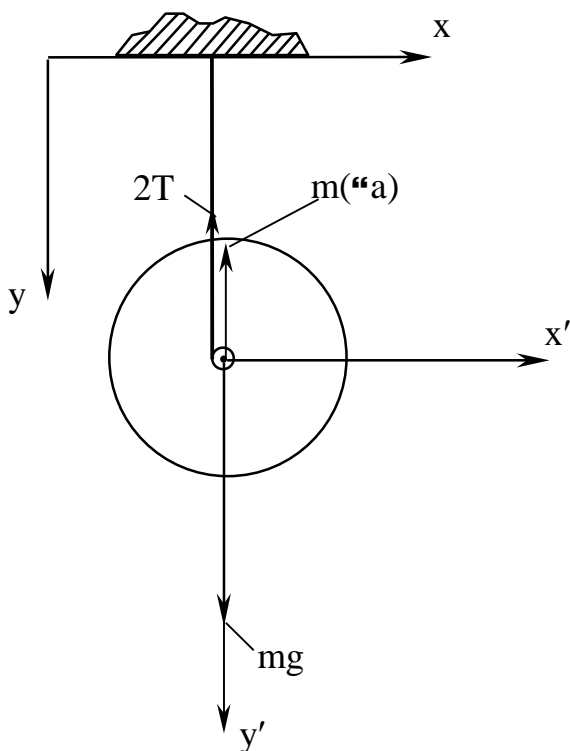


Рис. 2.

(I_0 – момент инерции маятника относительно его оси, β – его угловое ускорение относительно этой оси).

В-четвертых, два ускорения маятника Максвелла, линейное \mathbf{a} и угловое β , связаны уравнением

$$a = \beta r, \quad (3)$$

которое является не только одним из часто встречающихся примеров «уравнения кинематической связи»,

но и иллюстрацией роли кинематики при решении задач динамики.

Наконец, в-пятых, на примере маятника Максвелла удобно обсудить вопрос о различных осях вращения твердого тела – таких как главная, центральная, свободная, мгновенная оси.

3. О роли выбора системы отсчета

Все названные выше аспекты вопроса о движении маятника Максвелла рассматриваются обычно довольно кратко – если вообще упоминаются (см., например, [1–4]). В лучшем случае обсуждение вопроса сводится к получению системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} mg - 2T &= ma, & (1) \\ 2Tr &= I_0\beta, & (2) \\ a &= \beta r, & (3) \end{aligned} \right\} (4)$$

в которой величины m , I_0 и r считаются известными («параметры задачи»), а неизвестными являются T , a и β .

Между тем, наряду с упомянутыми выше аспектами, есть и еще одна сторона дела, причем относится она также к числу важнейших. При сопоставлении уравнений (1) и (2) сам собою возникает вопрос: почему уравнение движения и уравнение моментов записываются в различных системах отсчета? Развивая логику такого недоумения, можно спросить о том же несколько по-иному: нельзя ли записать оба динамических уравнения в одной и той же системе отсчета?

Этот последний вопрос естественно связывать с двумя уже выбранными системами отсчета – лабораторной (K -система) и той, которая движется поступательно относительно нее с ускорением \mathbf{a} центра масс маятника (K' -система).

В связи с поставленным вопросом наша задача сейчас сводится, очевидно, к тому, чтобы, во-первых, записать уравнение движения в K' -системе и, во-вторых,

записать уравнение моментов в К-системе, – при естественном условии, что то и другое окажется возможным.

Возможность записи первого из этих новых уравнений вполне очевидна: уравнение движения может быть записано при любом выборе системы отсчета. Если выбираемая система отсчета является неинерциальной, надо к «обычным» силам (в нашем случае это сила тяжести mg и силы натяжения нитей T) добавить силы инерции. Так как К'-система движется относительно К-системы поступательно с ускорением a (рис. 2), то в К'-системе к «обычным» силам добавится переносная сила инерции, равная $m(-a)$. В К'-системе ускорение центра масс маятника равно нулю ($a' = 0$), так что его уравнение движения представится в этой системе отсчета в виде

$$mg - 2T + m(-a) = 0. \quad (5)$$

Что касается возможности записи уравнения моментов в К-системе, то и она достаточно очевидна. Дело в том, что мгновенная ось вращения маятника Максвелла, «катящегося» вдоль вертикальной «дороги» (в ее роли выступают прямолинейные отрезки нитей), покоится относительно «дороги», а значит, и относительно К-системы. Поскольку в случае плоского движения твердого тела можно представить это движение при помощи мгновенной оси как только вращательное, то в данном случае будем иметь в К-системе:

$$mgr = (I_0 + mr^2)\beta. \quad (6)$$

В этом уравнении $(I_0 + mr^2)$ – момент инерции маятника относительно мгновенной оси вращения (найденный в соответствии с теоремой Штейнера).

Вот мы и получили фактически две системы уравнений, аналогичные (4): для К-системы –

$$\left. \begin{aligned} mg - 2T &= ma, & (1) \\ mgr &= (I_0 + mr^2)\beta, & (6) \\ a &= \beta r, & (3) \end{aligned} \right\} (7)$$

для К'-системы –

$$\left. \begin{aligned} mg - 2T + m(-a) &= 0, & (5) \\ 2Tr &= I_0\beta, & (2) \\ a &= \beta r. & (3) \end{aligned} \right\} (8)$$

Нетрудно убедиться в том, что системы уравнений (4), (7) и (8) имеют одинаковые решения:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{mg}{2} \frac{1}{1 + \frac{mr^2}{I_0}}, \\ a &= g \frac{1}{1 + \frac{I_0}{mr^2}}, \\ \beta &= \frac{g}{r} \frac{1}{1 + \frac{I_0}{mr^2}}. \end{aligned} \right\} (9)$$

Решение будет, конечно, тем же, если в качестве исходной выбрать систему уравнений (5), (6) и (3):

$$\left. \begin{aligned} mg - 2T + m(-a) &= 0, & (5) \\ mgr &= (I_0 + mr^2)\beta, & (6) \\ a &= \beta r. & (3) \end{aligned} \right\} (10)$$

Иначе говоря, можно сделать как бы «все наоборот» по отношению к системе уравнений (4): для записи уравнения движения выбрать К'-систему, а для записи

уравнения моментов – К-систему. Вместе с этим четвертым вариантом выбора систем координат будут исчерпаны все возможные варианты записи исходных динамических уравнений.

4. Случай двух маятников Максвелла

Рассмотрим теперь случай двух маятников Максвелла, связанных друг с другом двумя нитями (рис. 3). Наша задача сейчас, как и в случае одиночного маятника, состоит в том, чтобы записать все динамические уравнения в одной и той же системе отсчета. На сей раз таких уравнений должно быть четыре: два уравнения движения и два уравнения моментов.

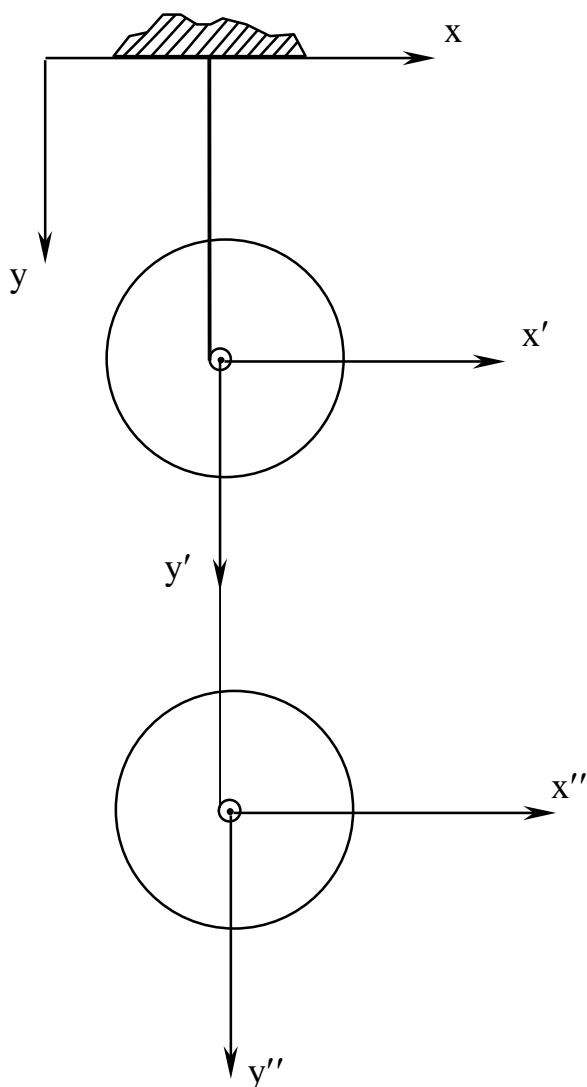


Рис. 3.

Как и для одиночного маятника, уравнения движения для двух маятников могут быть записаны в любой системе отсчета. Это могут быть, например, системы отсчета К, К' или К''. Первые две из них, как и в прежнем случае (рис. 2), – это, соответственно, лабораторная система отсчета (инерциальная) и та, что движется относительно нее поступательно с ускорением центра масс верхнего маятника \mathbf{a}_1 (рис. 3). Система К'' аналогична системе К': она движется поступательно относительно К-системы с ускорением центра масс нижнего маятника \mathbf{a}_2 (рис. 3). Как и К'-система, она является, следовательно, неинерциальной.

Для записи уравнения моментов годится лишь такая система отсчета, в которой движение твердого тела, участвующего в плоском движении, можно представить как только лишь вращательное (хотя бы в данное мгновение). Для верхнего маятника, как и в случае одиночного маятника, таких систем отсчета две – K и K' ; в первом случае «ось моментов» – это мгновенная ось вращения (она покоится в K -системе), во втором – ось самого маятника (она направлена вдоль оси z' системы K' и движется вместе с K' -системой).

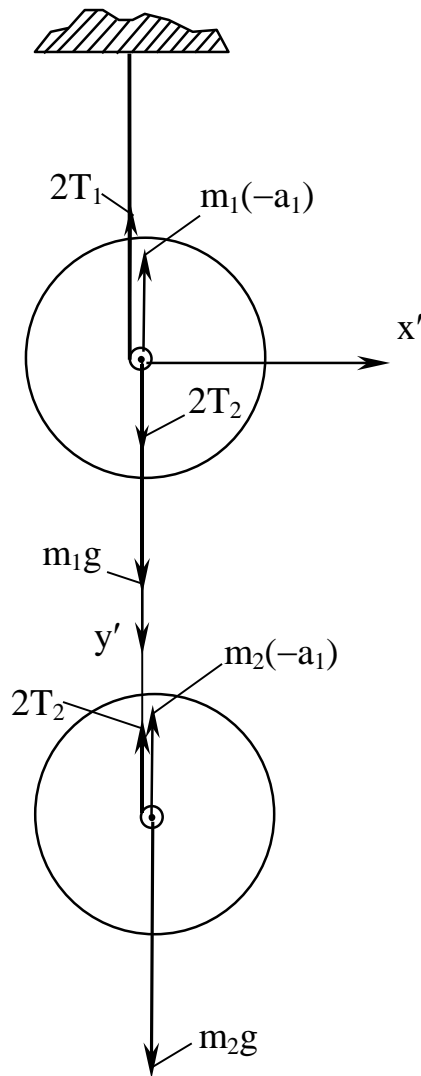


Рис. 4.

Легко видеть, что и для нижнего маятника также можно выбрать любую из двух осей в качестве «оси моментов» – либо мгновенную ось вращения, либо ось самого маятника. Первая из этих двух осей покоится относительно «дороги», по которой «катится» нижний маятник (в роли «дороги» выступают в данном случае прямолинейные отрезки нитей, соединяющих нижний маятник с верхним), а значит, она движется вместе с K' -системой. Вторая из двух «осей моментов» движется вместе с K'' -системой (эта ось направлена вдоль оси z'').

Таким образом, если выбирать какую-нибудь одну систему координат для записи обоих уравнений моментов, то, как видим, такой выбор – один-единственный: K' -система.

На рис. 4 показаны все силы, действующие на маятники в K' -системе. Наряду с «обычными» силами (это силы тяжести m_1g и m_2g , силы натяжения нитей

\mathbf{T}_1 и \mathbf{T}_2), показаны и силы инерции: $m_1(-\mathbf{a}_1)$ и $m_2(-\mathbf{a}_1)$.

Как и в случае одиночного маятника, запишем сначала уравнение движения для каждого из маятников:

$$\begin{cases} m_1 g - 2T_1 + 2T_2 + m_1(-a_1) = 0, & (11) \\ m_2 g - 2T_2 + m_2(-a_1) = m_2(a_2 - a_1). & (12) \end{cases}$$

Здесь учтено, что ускорение центра масс верхнего маятника в K' -системе равно нулю ($\mathbf{a}'_1 = 0$), а ускорение центра масс нижнего маятника в той же системе отсчета равно разности ускорений нижнего и верхнего маятников в K -системе ($\mathbf{a}'_2 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$).

Теперь запишем уравнения моментов для маятников в K' -системе:

$$\begin{cases} 2T_1 r_1 = I_0^{(1)} \beta_1, & (13) \\ m_2 g r_2 + m_2(-a_1)r_2 = (I_0^{(2)} + m_2 r_2^2) \beta_2. & (14) \end{cases}$$

Здесь $I_0^{(1)}$ и $I_0^{(2)}$ – моменты инерции верхнего и нижнего маятников относительно их осей (проходящих через центр масс), $(I_0^{(2)} + m_2 r_2^2)$ – момент инерции нижнего маятника относительно мгновенной оси вращения.

Если добавить к уравнениям движения и уравнениям моментов еще и уравнения кинематической связи

$$\begin{cases} a_1 = \beta_1 r_1, & (15) \\ a_2 = a_1 + \beta_2 r_2. & (16) \end{cases}$$

то получим полную систему уравнений для системы тел, состоящей из двух маятников, в K' -системе:

$$\left.
\begin{aligned}
m_1 g - 2T_1 + 2T_2 + m_1(-a_1) &= 0, & (11) \\
m_2 g - 2T_2 + m_2(-a_1) &= m_2(a_2 - a_1), & (12) \\
2T_1 r_1 &= I_0^{(1)} \beta_1, & (13) \\
m_2 g r_2 + m_2(-a_1) r_2 &= (I_0^{(2)} + m_2 r_2^2) \beta_2, & (14) \\
a_1 &= \beta_1 r_1, & (15) \\
a_2 &= a_1 + \beta_2 r_2. & (16)
\end{aligned}
\right\} (17)$$

Решая эту систему уравнений, можно найти все шесть неизвестных величин, которые в них входят, – T_1 и T_2 , a_1 и a_2 , β_1 и β_2 (выражая их через «параметры задачи» – m_1 и m_2 , $I_0^{(1)}$ и $I_0^{(2)}$, r_1 и r_2).

Система уравнений (17) аналогична двум другим системам уравнений, которые обсуждались выше, – (7) и (8). Во всех этих трех системах динамические уравнения записаны в одной системе отсчета: в (7) – в K -системе, в (8) – в K' -системе, в (17) – также в K' -системе.

Разумеется, динамическую задачу на тему о двух связанных маятниках Максвелла можно решать и в рамках традиционного подхода – так, как это делается на основе системы уравнений (4). В этом случае уравнения движения для маятников следует записать в K -системе (инерциальной), а уравнения моментов для верхнего и нижнего маятников – соответственно в K' - и в K'' -системах (это, как помним, – две различные неинерциальные системы координат). Добавив еще к этим четырем уравнениям два уравнения кинематической связи между ускорениями маятников a_1 , a_2 , β_1 и β_2 , получим полную систему уравнений:

$$\left.
\begin{aligned}
m_1 g - 2T_1 + 2T_2 &= m_1 a_1, & (18) \\
m_2 g - 2T_2 &= m_2 a_2, & (19) \\
2T_1 r_1 &= I_0^{(1)} \beta_1, & (13) \\
2T_2 r_2 &= I_0^{(2)} \beta_2, & (20) \\
a_1 &= \beta_1 r_1, & (15) \\
a_2 &= a_1 + \beta_2 r_2. & (16)
\end{aligned}
\right\} (21)$$

Подобно тому, как системы уравнений (4), (7) и (8) имеют одинаковые решения, системы (17) и (21) также дают, естественно, одинаковый результат.

5. Заключение

Результат решения задачи о плоском движении твердого тела в разделе «Механика» общего курса физики важен не только сам по себе (например, в связи с анализом зависимости искомых величин от «параметров задачи»). На примере обсуждавшихся выше задач об одиночном и о двух связанных маятниках Максвелла видно, что тот, кто решает такую задачу, имеет в «арсенале» своих средств не один, а несколько эквивалентных друг другу способов решения. Так, в задаче о маятнике Максвелла он может выбрать любой из четырех равнозначных подходов к решению задачи – на основе любой из четырех систем уравнений: (4), (7), (8) или (10). В задаче о двух связанных маятниках Максвелла основой решения может служить любая из двух рассмотренных эквивалентных друг другу систем уравнений – либо (17), либо (21).

Литература

1. С.Э.Хайкин. Физические основы механики. М.: Физматгиз, 1963, стр. 421-422.
2. С.П.Стрелков. Механика. М.: Наука, 1965, стр. 199-200.
3. Д.В.Сивухин. Общий курс физики, т. 1, Механика. М.: Наука, 1974, стр. 256.
4. А.Н.Матвеев. Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986, стр. 181.

On Maxwell's pendulum

V.I. Nikolaev

M.V.Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics

The subject of discussion is the role of choosing of the reference system in which the motion equation and the momentum equation are written for a solid body when solving tasks on the topic “Plane motion”. The main attention is paid to the question that several equivalent versions of writing the initial dynamics equations are possible. The basic ideas are illustrated by two concrete tasks – about the single Maxwell’s pendulum and about two ones connected with each other.